Prawda i niesprzeczność

Jan Woleński

Oba tytułowe pojęcia są zwykle analizowane razem w kontekście koherencyjnej teorii prawdy[1]. Prosty, niemal podręcznikowy argument przeciw tej koncepcji jest taki. Prawda nie może być identyfikowana z niesprzecznością, ponieważ można ułożyć spójną bajkę, o której wiadomo, że jest fałszywa. Tedy, niesprzeczność jest co najwyżej niezbędnym warunkiem prawdziwości, a nie wystarczającym. Pomijając takie lub inne repliki koherencjonisty, zawsze wskazujące, że koherencja to niesprzeczność plus coś jeszcze, odnotujmy tylko, że wspomniany argument przeciw koherencyjnej teorii prawdy sugeruje, że niesprzeczność jest słabszym pojęciem niż prawdziwość. Inaczej mówiąc, prawdziwość pociąga niesprzeczność, ale nie na odwrót. W samej rzeczy, każdy prawdziwy zbiór zdań jest niesprzeczny z definicji. Załóżmy, że Γ jest prawdziwym zbiorem zdań. Znaczy to, że dla każdego $A \in \Gamma$, A jest prawdą. Z tego wynika, że Γ nie zawiera żadnej negacji zdania doń należącego, a zatem jest niesprzeczne. *Ergo*, jeśli Γ jest prawdziwe, to jest niesprzeczne. Skoro jednak istnieją fałszywe i niesprzeczne zbiory zdań, np. zbiór Γ' taki, że dla każdego A, A $\in \Gamma$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\neg A \in \Gamma'$, to niesprzeczność nie pociąga prawdziwości. Jedną część tego argumentu (ale tylko ją, jak zobaczymy później) można podbudować twierdzeniem Gödla-Malcewa o pełności, głoszącym, że jeśli zbiór zdań jest niesprzeczny, to ma model. Istotnie, jeśli $A \in \Gamma$ jest prawdziwym zbiorem zdań, ma model *ex definitione*. Jest więc niesprzecznym zbiorem zdań. *Ergo*, prawdziwość implikuje niesprzeczność[2].

Powyższe uwagi można przedstawić nieco bardziej formalnie. Potraktujmy Γ jako teorie dedukcyjną, tj. $\Gamma = Cn\,\Gamma$, sformułowaną w pewnym języku **J**. Zgodnie z wcześniejszym ustaleniem przyjmujemy, że $\Gamma \in$ **VER** (Γ jest prawdziwe) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $A \in \Gamma$, A $\in$ **VER**. Dalej, $\Gamma \in$ **FLS** (Γ jest fałszywe) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $A \in \Gamma$, A $\in$ **FLS**[3]. $\Gamma \in$ **NSP** (Γ jest niesprzeczne)

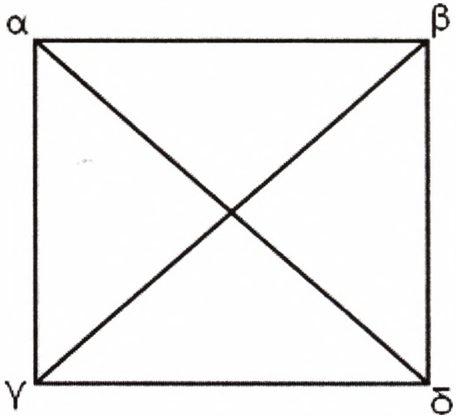
---

[1] Dyskusja na ten temat znajduje się w Woleński [2005, s. 96–99, 121–123, 349–353]. Niniejszy artykuł jest kontynuacją pewnych wątków poruszonych w cytowanej książce na s. 238–240. Por. też Woleński [2008]. Moje rozważania można też uznać za przyczynek do prawdziwych logiki w rozumieniu Jerzego Perzanowskiego (wyniki nie są jeszcze opublikowane przez autora).

[2] Implikacja od prawdziwości do niesprzeczności zgodna jest z poglądem, że niesprzeczność jest tym samym, co możliwość, a tym samym to, co prawdziwe (to co jest), pociąga to, co możliwe.

[3] Z formalnego punktu widzenia, powinno się odróżniać prawdziwość (fałszywość) zbiorów zdań od

wtedy i tylko wtedy, gdy $Cn\Gamma \neq \mathbf{J}$, natomiast $\Gamma \in$ **SPR** (Γ jest sprzeczne) wtedy i tylko wtedy, gdy Γ nie jest niesprzeczne, tj. gdy $Cn\Gamma = \mathbf{J}$. Będę rozważał relacje zachodzące między zdaniami: α – $\Gamma \in$ **VER** (Γ jest prawdą, prawdą jest, że Γ), β – $\Gamma \in$ **SPR** (Γ jest sprzeczne, jest sprzeczne, że Γ), γ – $\Gamma \in$ **NSP** (Γ jest niesprzeczne, jest niesprzeczne, że Γ) oraz δ – $\Gamma \in$ **FLS** (Γ jest fałszem, jest fałszem, że Γ)[4]. Można teraz przedstawić zależności między zdaniami α, β, γ i δ za pomocą kwadratu logicznego (**D**)



Zgodnie z ogólnymi zasadami kwadratu logicznego mamy następujące fakty:

(1) $\vdash \neg(\alpha \wedge \beta)$ (α i β są przeciwne; nie mogą być zarazem prawdziwe);

(2) $\vdash (\alpha \Rightarrow \gamma)$ (α logicznie pociąga γ; γ jest podporządkowane α);

(3) $\vdash (\beta \Rightarrow \delta)$ (β logicznie pociąga δ; δ jest podporządkowane β);

(4) $\vdash (\alpha \Leftrightarrow \neg\delta)$ (α i δ są sprzeczne; jeśli jedno jest prawdziwe, to drugie jest fałszywe);

(5) $\vdash (\beta \Leftrightarrow \neg\gamma)$ (β i γ są sprzeczne; jeśli jedno jest prawdziwe, to drugie jest fałszywe);

(6) $\vdash (\gamma \vee \delta)$ (γ i δ dopełniają się; oba nie mogą być zarazem fałszywe).

Zależności (1)–(6) dają:

(7) Żadna teoria Γ nie może być zarazem prawdziwa i sprzeczna;

prawdziwości (fałszywości) samych zdań, ale byłaby to zbędna pedanteria w tym kontekście.

[4] Sformułowania typu 'jest prawdą (sprzeczne, niesprzeczne, fałszem), że Γ' są podane dla uwypuklenia modalnego charakteru rozważanych zdań.

(8) Prawdziwość Γ pociąga niesprzeczność Γ;
(9) Sprzeczność Γ implikuje fałszywość Γ;
(10) Każda teoria Γ jest albo prawdziwa, albo fałszywa;
(11) Każda teoria Γ jest albo niesprzeczna, albo sprzeczna;
(12) Każda teoria Γ jest niesprzeczna lub fałszywa.

Twierdzenia (7)–(12) mają status prawd logicznych generowanych przez teorię kwadratu (**D**), analogicznych do tych dotyczących zdań kategorycznych lub modalności aletycznych[5]. (**D**)-logika nie wyklucza teorii, które są zarazem niesprzeczne i fałszywe (wynika to zarówno z (7), jak i (12)), a więc sankcjonuje to, co jest zwykle podnoszone w związku z analizą koherencyjnej teorii prawdy.

Niemniej jednak, można wysunąć pewne zastrzeżenia wobec przeprowadzonej analizy. Zakłada ona milcząco zasadę biwalencji w odniesieniu do teorii (i zdań). To decyduje o wzajemnym położeniu zdań w (**D**). Gdy dwuwartościowość zostaje odrzucona, można przyjąć, że β jest rozumiane jako 'teoria Γ jest fałszywa', natomiast δ jako 'teoria Γ jest sprzeczna'. To jednak prowadzi do problemów, ponieważ fałsz implikuje sprzeczność, a także możliwe są teorie zarazem sprzeczne i niesprzeczne. Być może jest to zgodne z jakimiś intuicjami dotyczącymi parakonstyntencji. Niewykluczone, że rezygnacja z biwalencji wymaga zasadniczej modyfikacji kwadratu logicznego lub nawet jego porzucenia, ale nie będę tej kwestii rozwijał. Dalsze rozważania zakładają, że każda teoria jest albo prawdziwa albo fałszywa, ale cały czas trzeba pamiętać, że nie jest to wymuszone przez logikę. Znacznie ważniejsza jest pewna konsekwencja twierdzenia Gödla-Malcewa. Ma ono postać nie implikacji 'Jeśli teoria jest niesprzeczna, to ma model', ale równoważności 'Teoria ma model wtedy i tylko wtedy, gdy jest niesprzeczna'. Lewa strona tej równoważności ma charakter semantyczny, a prawa syntaktyczny. Jeśli jednak dana teoria, powiedzmy Γ, ma model, powiedzmy **M**, to znaczy, że jest w nim prawdziwa.

Ostatecznie więc możemy przyjąć

(13) Teoria Γ jest prawdziwa w jakimś modelu **M** wtedy i tylko wtedy, gdy jest niesprzeczna.

Znaczy to, że dla każdej niesprzecznej teorii Γ istnieje model, w którym jest ona prawdziwa. Ponieważ jednak (13) nie wyróżnia żadnego modelu jako „właściwego", odróżnienie prawdy i niesprzeczności może polegać tylko na tym, że pierwsze z tych pojęć jest semantyczne, a drugie syntaktyczne. Fatalna konsekwencja dla wcześniejszej analizy polega na tym, że zależność

---

[5] W szczególności, (8) odpowiada prawu, że konieczność implikuje możliwość.

(14) Jeśli teoria Γ jest niesprzeczna, to jest prawdziwa,

znajduje usprawiedliwienie w (13). W ten sposób podstawowa intuicja, że prawda jest mocniejsza niż niesprzeczność, zostaje zakwestionowana. W samej rzeczy, kwadrat $[\alpha, \beta, \gamma, \delta]$ zostaje zredukowany do odcinka $[\alpha, \delta]$, gdzie $\alpha \Leftrightarrow \gamma$ i $\beta \Leftrightarrow \delta$. Trzeba więc dokonać jakiegoś uzupełnienia pojęciowego.

Punktem wyjścia niech będzie pojęcie ω-niesprzeczności. Załóżmy, że Γ wystarcza dla wyrażenia w niej arytmetyki. Mówimy, że Γ jest ω-niesprzeczna, gdy zachodzi

(15) Jeśli $\Gamma \vdash P1, P2, P3, \ldots$, to $\neg(\mathbf{T} \vdash \exists n \neg Pn)$.

W konsekwencji, teoria Γ jest ω-sprzeczna, gdy $\Gamma \vdash P1, P2, P3, \ldots$ oraz $\Gamma \vdash \exists n \neg Pn$[6]. Diagram (**D**) przyjmuje teraz taką interpretację: α – teoria Γ jest ω-niesprzeczna, β – teoria Γ jest (logicznie) sprzeczna, γ – teoria Γ jest niesprzeczna, δ – teoria Γ jest ω-sprzeczna. Daje to takie zależności:

(16) Żadna teoria Γ nie może być zarazem ω-niesprzeczna i sprzeczna;
(17) ω-niesprzeczność Γ pociąga niesprzeczność Γ;
(18) Niesprzeczność Γ pociąga ω-sprzeczność Γ[7];
(19) Każda teoria Γ jest albo ω-niesprzeczna, albo ω-sprzeczna;
(20) Każda teoria Γ jest albo niesprzeczna, albo sprzeczna;
(21) Każda teoria Γ jest niesprzeczna lub ω-sprzeczna.

W konsekwencji, możliwe są teorie zarazem niesprzeczne i ω-sprzeczne. Mają one tzw. modele niestandardowe, tj. struktury, w których istnieją tzw. niestandardowe liczby naturalne[8]. Jeśli c jest taką liczbą, to dla każdego $n \in \mathbf{N}$ (jest zbiorem standardowych liczb naturalnych), $c > n$, co znaczy, że niestandardowe liczby naturalne są większe od dowolnej standardowej liczby naturalnej.

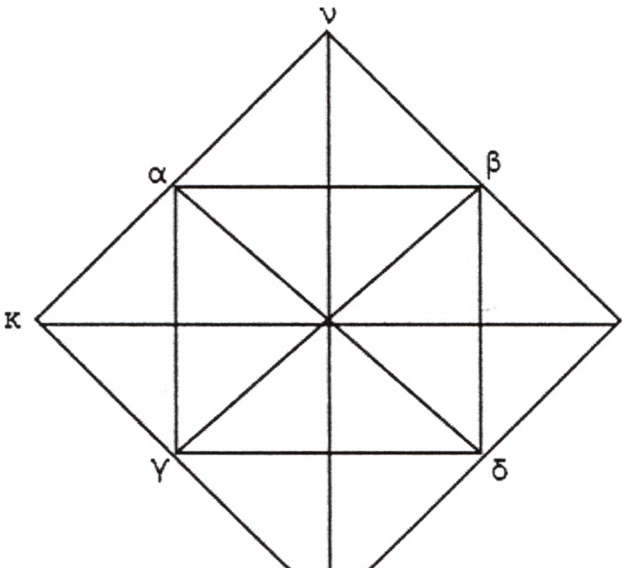
---

[6] Litera ω zaznacza, że rozważamy języki z nieskończenie przeliczalną ilością stałych indywiduowych, symbolizowanych przez liczebniki *1, 2, 3*,... Pojęcia ω-niesprzeczności i ω-sprzeczności mogą być uogólnione (zob. [Grzegorczyk 1973, s. 263]) w ten sposób, że zbiór stałych będzie nieprzeliczalny. Mamy wtedy do czynienia z opisową niesprzecznością (sprzecznością).

[7] Niesprzeczność pociąga wszystko, w szczególności ω-sprzeczność.

[8] Arytmetyka jest zazwyczaj przedstawiana w postaci aksjomatycznej. Ważna jest obserwacja, że aksjomaty są spełnione zarówno w modelach standardowych, jak i niestandardowych. Twierdzenie Löwenheima-Skolema powiada, że każda teoria pierwszego rzędu (takie tutaj rozpatrujemy) mająca model nieskończony ma również model nieskończony dowolnej kardynalności (kardynalność modelu wyraża się mocą jego uniwersum). Wynika z tego, że arytmetyka liczb naturalnych, której intuicyjnym modelem jest struktura z przeliczalnie nieskończonym uniwersum, ma modele niestandardowe, czyli takie, które są nieprzeliczalne. Modele z niestandardowymi liczbami naturalnymi mogą mieć tę samą kardynalność, co zbiór **N** standardowych liczb naturalnych. Podstawowe fakty o niestandardowych modelach arytmetyki można naleźć w [Kaye 1991] i [Kossak, Schmerl 2006].

Jeśli dana teoria Γ jest niesprzeczna, ma, na mocy twierdzenia Gödla-Malcewa, model, w którym jest prawdziwa, niezależnie od tego, czy jest ona ω-niesprzeczna czy ω-sprzeczna. Odróżnienie teorii ω-niesprzecznych i ω-sprzecznych, chociaż dokonuje się w ramach syntaksy, sugeruje pewne kryterium prawdziwości *simpliciter*, a więc takiej, o jaką chodziło filozofom, przynajmniej w odniesieniu do arytmetyki. *Prima facie*, można powiedzieć, że teoria Γ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy jest ω-niesprzeczna. Chociaż manewr ten zachowuje prawa diagramu (**D**), jest nie do przyjęcia, ponieważ znane są wypadki teorii ω-niesprzecznych, ale fałszywych w modelu standardowym[9]. Trzeba więc dysponować pojęciem prawdy niezależnie od pojęcia ω-niesprzeczności. Określimy ją jako prawdziwość standardową. Jak każdy rodzaj prawdziwości jest ona zależna od interpretacji. W wypadku arytmetyki decydujemy, że mamy tyle liczebników, ile liczb, wykluczamy liczby niestandardowe i na nich definiujemy takie działania, jak następnik, dodawanie, mnożenie itd., i takie relacje, jak mniejszość, większość czy równość. W rezultacie otrzymujemy to, co zwykle nazywamy arytmetyką (arytmetykę standardową). Rozbudujemy teraz diagram (**D**) do (**D1**), tj.



[9] Por. [Lindström 2003, s. 46–47].

Poszczególne punkty nowego diagramu interpretujemy następująco: α – teoria Γ jest standardowo prawdziwa, β – teoria Γ jest (logicznie) sprzeczna, κ – teoria Γ jest ω-niesprzeczna, γ – teoria Γ jest niesprzeczna, λ – teoria Γ jest ω-sprzeczna, δ – teoria Γ nie jest standardowo prawdziwa (= jest standardowo fałszywa), ν – teoria Γ jest standardowo prawdziwa lub sprzeczna, μ – teoria Γ jest niesprzeczna i standardowo fałszywa. Mamy m.in. następujące dodatkowe prawa:

(22) Żadna teoria Γ nie jest standardowo prawdziwa i sprzeczna;
(23) Standardowa prawdziwość pociąga ω-niesprzeczność;
(24) ω-sprzeczność pociąga standardową fałszywość;
(25) Każda teoria Γ jest ω-niesprzeczna lub standardowo fałszywa;
(26) Niestandardowa prawdziwość pociąga niesprzeczność.

Jeśli dana teoria Γ spełnia warunek μ, ma model, ale może być ω-niesprzeczna albo ω-sprzeczna. Niemniej jednak, skoro nie jest standardowo prawdziwa, a jest prawdziwa z uwagi na posiadanie modelu, musi być niestandardowo prawdziwa. Twierdzenie Gödla-Malcewa nie może być sformułowane jako głoszące, że teoria Γ ma model wtedy i tylko wtedy, gdy jest ω-niesprzeczna, gdyż zachodzi tylko implikacja od ω-niesprzeczności do modelu, ale nie zależność odwrotna. W ten sposób, nawet jeśli nie możemy zastąpić prawdziwości przez ω-niesprzeczność, mamy wskazówkę, jak ominąć trudność związaną z (13). Nie jest tak, że teoria jest standardowo prawdziwa, jeśli posiada model, ponieważ prawdziwość standardowa związana jest z modelem standardowym.

Czy można powyższe rozważania uogólnić tak, aby stosowały się poza arytmetyką? Nie jest to łatwe, gdyż nie ma formalnego kryterium standardowości, nawet w wypadku teorii matematycznych[10]. Jest to spowodowane faktem, że standardowość jest pojęciem pragmatycznym, zależnym od tego, co uważany za właściwe, intuicyjne, adekwatne itp. Stąd mówi się o modelach zamierzonych, tj. takich, jakie chcielibyśmy mieć z uwagi na tradycję, stan badań itp. Niemniej jednak, w matematyce, w szczególności, w arytmetyce, przedmioty są dobrze określone, a katalog własności wyrażanych przez predykaty, przynajmniej tych pierwotnych, niewielki i wyeksplikowany aksjomatycznie. Tam, gdzie do głosu dochodzą kryteria empiryczne, sprawa staje się skomplikowana. Po pierwsze, nie wiadomo, jak ustalić zakres stosowalności twierdzenia Gödla-Malcewa. Czy stosuje się ono do dowolnego spójnego zbioru zdań, nawet do takiego, który od początku jest traktowany jako swobodna fikcja? Aby nie komplikować dalszych rozważań, przyjmę, że zajmujemy się językiem traktowanym jako środek opisu świata rzeczywistego zarówno z naukowego jak i potocznego punktu widzenia. Kolejny problem dotyczy rozumienia modelu w takiej sytuacji. Nie

---

[10] Por. [Gaifman 2003].

jest nim świat po prostu, ale struktura algebraiczna traktowana jako należyta reprezentacja rzeczywistości[11]. Kolejna trudność dotyczy zakresu rozważanych obiektów i ich własności. Przyjmijmy zatem kolejną idealizację, że zasób stałych indywiduowych i predykatów został wystarczająco ustalony.

Przy tych uproszczeniach można przystąpić do próby generalizacji wcześniejszych ustaleń[12]. Na początek rozważymy prostą sytuację, w której do uniwersum modelu **M** uważanego za reprezentację świata rzeczywistego dodajemy dodatkowy obiekt (lub więcej obiektów), ewentualnie zmieniamy własności zastanych przedmiotów. Odpowiada to sytuacji, w której rozważa się np. rozmaite historyczne scenariusze przez wzbogacenie zasobu osób ważnych dla przebiegu historii. Można się np. zastanawiać, jak wyglądałby scenariusz (możliwy świat, możliwy model), gdyby Zygmunt August miał następcę tronu lub Arystoteles zostałby scholarchą Akademii. Jeszcze innym przykładem byłby świat ze szczytem wyższym niż 9000 m n.p.m. Mamy prawo nazwać takie obiekty niestandardowymi przedmiotami empirycznymi. Poprzednie rozważania można niemal całkowicie przenieść do nowej sytuacji. Dla ustalenia uwagi rozważmy świat z górą nazwaną np. Mt. Peak*. Wprowadzamy predykat *P* 'bycie górą niższą od 9000 m' i natychmiast zauważamy, że jest on spełniony przez każdy szczyt ziemski, tj. standardowy. Ponumerujmy szczyty standardowe liczbami naturalnymi. Oznaczmy opis ziemi z punktu widzenia ukształtowania jej terenu literą **T**, o ile dotyczy szczytów standardowych, tj. ma model **M**, a **T***, gdy model, oznaczymy go symbolem **M***, jest poszerzony o Mt. Peak* . Zachodzi

(27) (a) Jeśli $\mathbf{T}\vdash P1, P2, P3, \ldots$, to $\mathbf{T}\vdash \forall x Px$;
(b) $\mathbf{T}^*\vdash P1, P2, P3, \ldots$ oraz $\mathbf{T}^*\vdash \exists x \neg Px$.

Aby nie nadużywać terminologii metamatematycznej, powiemy, że teoria **T** jest standardowo niesprzeczna, a teoria **T*** standardowo sprzeczna. Obie są niesprzeczne, a więc mają modele, w których są prawdziwe. Wszelako teoria **T** jest standardowo prawdziwa, a teoria **T*** standardowo fałszywa, aczkolwiek jest niestandardowo prawdziwa. Analogia z arytmetyką jest tak daleka, że model **M** jest początkowym segmentem modelu **M***, podobnie jak model standardowy arytmetyki jest początkowym

[11] Por. uwagi na ten temat w [Woleński 2005, s. 328–338]. Interpretacja empiryczna języka jest superpozycją dwóch funkcji, jednej z języka w strukturę oraz drugiej, z tej struktury w przedmioty i relacje empiryczne.

[12] Trzeba dobrze rozumieć znaczenie słowa 'generalizacja' w tym kontekście. Nie znaczy ono, że poszukujemy uogólnienia w takim sensie, w jakim powiada się np., że przestrzeń topologiczna jest uogólnieniem przestrzeni metrycznej. Generalizacja jest tutaj rozumiana jako przejście od rozważań metamatematycznych do filozoficznych.

segmentem dowolnego modelu niestandardowego[13]. Twierdzę, że w wypadku dodania obiektów niestandardowych zawsze można określić predykat, dla którego zachodzi (27b). Odnotujmy też, że wprowadzenie nowego obiektu i nazwanie go, czyli dodanie nowej stałej indywiduowej, zmienia język, a jeśli komuś tego rodzaju konstatacja wydaje się zbyt radykalna, to zapewne zgodzi się, że została zmieniona wyjściowa interpretacja języka. Wniosek z tego jest taki, że interpretacje są kluczowe dla odróżnienia tego, co standardowe, i tego, co niestandardowe.

Poważniejszy problem wiąże się z interpretacją predykatów. W pewnym sensie ta kwestia powstaje już na gruncie poprzedniego przykładu, bo np. predykat ‘być górą’ denotuje inny podzbiór uniwersum w **M**, a inny w **M***. Formalnie rzecz biorąc, predykaty te wyrażają różne własności, ponieważ w **M** jest to własność bycia górą standardową (niższą niż 9000 m), a w **M*** – atrybut bycia górą standardową lub niestandardową. Jak jednak potraktować sytuację, w której nazywamy kolor biały przymiotnikiem czarny, a kolor czarny przymiotnikiem ‘biały’, aczkolwiek percepcja kolorów nie ulega zmianie; pomijamy także patologie widzenia? Czy wolno nam powiedzieć, że skoro modele są zależne od interpretacji, to wprowadzając nazewnictwo odmienne od powszechnego, zdecydowaliśmy się na niestandardowe rozumienie predykatów? Para zdań ‘ten ołówek jest biały’ i ‘ten śnieg jest czarny’ w sytuacji, gdy trzymamy w ręku czarny ołówek, a za oknem widzimy biały śnieg, tworzy niesprzeczną koniunkcję, ale trudno rozstrzygnąć, czy jest to niesprzeczność standardowa czy też nie. Jeśli uznamy, że zastane znaczenie przymiotników ‘biały’ i ‘czarny’ jest właściwe, to nasza koniunkcja jest standardowo fałszywa, ale niestandardowo prawdziwa. Z drugiej jednak strony, podzbiory uniwersum stanowiące denotacje predykatów nie uległy zmianie, a własności przedmiotów pozostały takie same. Być może należy sprawę postawić w ten sposób, że w sytuacji, gdy zmieniamy jedynie słowa, ale struktura modelu pozostaje taka sama, wystarczy odróżnienie standardowej prawdy i zwykłej niesprzeczności, ponieważ to wystarcza dla zdefiniowania niestandardowej prawdy, tj, standardowego fałszu[14]. To prosto rozwiązuje problem, co byłoby, gdyby zdanie ‘śnieg jest biały’ znaczyło, że trawa jest zielona. Trzeba odpowiedzieć, że nic szczególnego poza tym, że przyjęlibyśmy odmienną interpretację języka. Jakby nie było, pojęcie standardowej prawdziwości w modelu, zależnej albo od kolekcji standardowych przedmiotów, albo od standardowego rozumienia predykatów, albo od jednego i drugiego, wydaje się fundamentalne. To, co filozofowie tradycyjnie nazywali prawdą *simpliciter*, traci zastosowanie właśnie z uwagi na potrzebę operowania pojęciem standardowej

---

[13] Niemniej jednak, analogie te są ograniczone, np. niestandardowe modele arytmetyki nie są rekurencyjne, natomiast odróżnienie modeli rekurencyjnych i nierekurencyjnych nie ma większego sensu poza matematyką.

[14] Wtedy standardowy fałsz obejmowałby logiczną sprzeczność i niestandardową prawdziwość.

prawdziwości. Jest ono semantyczne, ale z wyraźnym składnikiem pragmatycznym. Jeśli te konkluzje są trafne, to pragmatyka języka jest zawsze naczelną dziedziną semiotyki, ponieważ od niej zależy interpretacja semantyczna. Pytanie, skąd się bierze interpretacja, którą traktujemy jako powszechnie przyjętą i standardową, jest ważne, ale dla semantyki wystarczy przyjąć, że takowa istnieje.

Bibliografia

H. GAIFMAN (2003), Non-Standard Models in a Broader Perspective, w: *Nonstandard Models of Arith-metic and set Theory*, A. Enayat i R. Kossak (red.), American Mathematical Society, Providence, s. 1–22.

A. GRZEGORCZYK (1973), *Zarys logiki matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.

R. KAYE (1991), *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press, Oxford.

R. KOSSAK, J. SCHMERL (2006), *The Structure of Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press, Oxford.

P. LINDSTRÖM (2003), *Aspects of Incompleteness*, A K Peters, Matick, Mass.

J. WOLEŃSKI (2005), *Epistemologia. Poznanie, prawda, wiedza, realizm*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

J. WOLEŃSKI (2008), Applications of Squares of Oppositions and Their Generalizations in Philosophical Analysis, *Logica Universalis* (w druku).